9. FUNKCJA LOGARYTMICZNA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

DEFINICJA LOGARYTMU

⇨ Niech $a, b \in \mathbf{R}_+$ i $a \neq 1$. $\log_a b = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^c = b$.

OZNACZENIA

⇨ $\log_{10} x = \log x$ ⇨ $(\log_a x)^n = \log_a^n x$

TWIERDZENIA O LOGARYTMACH

Jeśli $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{R}$, to

⇨ $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ ⇨ $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

⇨ $n \log_a x = \log_a x^n$ ⇨ $a^{\log_a x} = x$

TWIERDZENIA O ZAMIANIE PODSTAWY LOGARYTMU

Jeśli $a, b \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$, $x \in \mathbf{R}_+$, to

⇨ $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

WŁASNOŚCI FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbf{R}_+ \setminus \{1\}$

⇨ Dziedzina: $\mathbf{R}_+$

⇨ Zbiór wartości: $\mathbf{R}$

⇨ Monotoniczność: jeśli $a \in (1; +\infty)$, to funkcja jest rosnąca; jeśli $a \in (0; 1)$, to funkcja jest malejąca.

ZADANIA WPROWADZAJĄCE

Zdający zna	• definicję logarytmu
Zdający potrafi	• stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym • stosować wzór na logarytm potęgi o wykładniku rzeczywistym i wzór na zamianę podstawy logarytmu

9.1 R Oblicz

a) $\log_2 8$; **b)** $\log_6 \sqrt{6}$; **c)** $\log_3 1$; **d)** $\log_5 0{,}2$;

e) $\log 2 + \log 50$; **f)** $\log_3 18 - \log_3 2$; **g)** $2^{\log_2 5}$; **h)** $27^{\log_3 2}$; **i)** $\dfrac{\log_6 125}{\log_6 5}$.

9.2 R Oblicz

a) $\dfrac{\log_4 5}{\log_2 5}$; b) $\log_2(\log_3 \sqrt{5}) - \log_2(\log_3 5)$; c) $(\sqrt{8})^{\frac{2}{3} + \log_4 81}$.

9.3 W Znajdź liczbę p, jeśli

a) $\log_2 p = 3$; **b)** $\log_6 p = 0$; **c)** $\log_{0{,}5} p = -2$; **d)** $\log_5 p = 1{,}5$;

e) R $\log_3(\log_2 p) = 2$; **f)** R $\log_p(5p - 4) = 2$.

Zdający potrafi	• posługiwać się własnościami funkcji logarytmicznych • szkicować wykresy funkcji logarytmicznych

9.4 Określ dziedzinę funkcji
a) $f(x)=\log_2 x$; b) R $f(x)=\log_x(3-x)$; c) $f(x)=\log(x^2+4x+3)$; d) R $f(x)=\log(x^2+3x+4)$.

9.5 R Znajdź te wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\log(x^2+4x+m)$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

9.6 R Wyznacz te wartości parametru m, dla których funkcja $g(x)=\log_{4m+9}x$ jest malejąca.

9.7 Określ znak liczby
a) R $\log_a b$, jeżeli $a>1$ i $b>1$; b) $\log_a b$, jeżeli $a\in(0,1)$ i $b\in(0,1)$; c) R $\log_a b$, jeżeli $a\in(0,1)$ i $b>1$.

9.8 R Wyznacz wszystkie liczby p spełniające nierówność
a) $\log_2 p<3$; b) $\log_{0,5} p>3$.

9.9 W Rozstrzygnij, czy funkcje f i g są równe.
a) $f(x)=\log_3(x-2)+\log_3(x-3)$ i $g(x)=\log_3[(x-2)(x-3)]$;
b) $f(x)=\log(x-2)-\log(x-3)$ i $g(x)=\log\frac{x-2}{x-3}$; c) $f(x)=\log(x-2)-\log(3-x)$ i $g(x)=\log\frac{x-2}{3-x}$;
d) $f(x)=\log x^2$ i $g(x)=2\log x$; e) $f(x)=\log x^2$ i $g(x)=2\log|x|$.

9.10 R Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji
a) $g(x)=\log_2(-x)$; b) $h(x)=\log_2(2-x)$; c) $k(x)=\log_2\frac{1}{x}$; d) $l(x)=\log_2|x|$.

ZADANIA MATURALNE

LOGARYTM

454. R Która z liczb $\log_7 7\sqrt{7}$, $\log_{32}8$, $\log_3\sqrt[3]{9}$ jest najmniejsza, a która największa?

455. R O ile procent liczba $\log 8$ jest mniejsza od liczby $\log^2 4+\log 25\cdot\log 4$?

456. O ile procent liczba $2^{2\sqrt{3}+\log_2 7}$ jest większa od liczby $4^{\sqrt{3}+1}$?

457. R Rozstrzygnij, które z liczb $a=\log_4\sqrt{5}\cdot\log_{25}8$, $b=\log 2\cdot\log 50+\log^2 5$, $c=(\log_3 36)^2-\log_3 16\cdot\log_3 18$ są liczbami całkowitymi.

458. Uzasadnij, że liczby $a=\log_7 2\cdot\log 7+\log 50$, $b=\dfrac{\log_2 36\cdot\log_3 36}{\log_2 36+\log_3 36}$, $c=\dfrac{\log^3 4+\log^3 25}{4\cdot(\log^2 2-\log 2\cdot\log 5+\log^2 5)}$ są równe.

459. R Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste a spełniające równość $\log_{1-2a}(a+7)=2$.

460. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste p spełniające równość $9^{\log_3(p-3)}=4$.

461. R Oblicz $\log_2(-ab)$ wiedząc, że $\log_{(-a)}2=2$ i $\log_{16}b=0{,}75$.

462. Oblicz $\log_a\sqrt{ab}$ wiedząc, że $\log_a b=5$, gdzie a, b są liczbami dodatnimi i $a\neq 1$.

463. Oblicz $\log ab$ wiedząc, że $\log 10a=2010$ i $\log\frac{10}{b}=1020$.

464. Oblicz $\log_{a^2}\frac{1}{b}$ wiedząc, że $\log_a b=\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami dodatnimi i $a\neq 1$.

465. Oblicz $\log_{abc}p$ wiedząc, że $\log_a p=2$, $\log_b p=3$ i $\log_c p=6$.

466. R Uzasadnij, że liczby $2^{\log_3 5}$ i $5^{\log_3 2}$ są równe.

467. Wykaż, że jeśli $b, c\in\mathbf{R}_+$ i $\log_2 b+\log_2 c+1=\log_2(b^2+c^2)$, to $b=c$.

468. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k większej od 2 zachodzi równość
$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{k+1}k=\log_{k+1}2$.

469. R Udowodnij, że jeżeli $c\in\mathbf{R}_+\setminus\{1\}$, $a,b\in\mathbf{R}_+$ i $a^2+b^2=7ab$, to $\log_c\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)$.

470. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b równanie $\log a\cdot x^2+\log b=\log(ab)^x$ ma co najmniej jedno rozwiązanie. Kiedy równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie?

471.* R Niech $x=10^{\frac{1}{1-\log z}}$ i $y=10^{\frac{1}{1-\log x}}$. Wykaż, że $z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$.

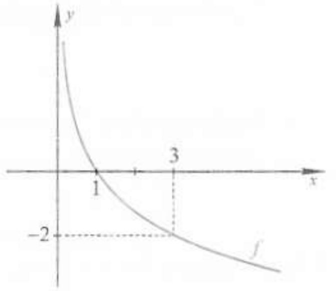
FUNKCJA LOGARYTMICZNA

472. R Obok pokazano fragment wykresu funkcji logarytmicznej f.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu $9\sqrt{3}$.

b) Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość $-\frac{2}{3}$?

Zapisz znaleziony argument w postaci $\sqrt[n]{c}$, gdzie c jest liczbą całkowitą.



473. Punkt $A=(2,-1)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=\log_2(x+k)+m$. Dziedziną funkcji f jest przedział $(-2;+\infty)$.

a) Wyznacz k i m.

b) Znajdź zbiór tych argumentów, dla których funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie.

474. R Dane są funkcje funkcji $f(x)=5^{\log_5(4-x^2)}$ i $g(x)=3^{1+\log_3 x}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Znajdź współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i g.

475. R Naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji $f(x)=\log_{0,5}(x^2-5x+6)-\log_{0,5}(x-3)$.

476. Punkt $A=(0{,}125,-3)$ należy do wykresu funkcji logarytmicznej f. Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|f(x)|}$.

477. R Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\log_{0,5}\frac{4}{x-1}$.

478. W Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji $g(x)=0{,}5\log_2 x^2$ i wykres funkcji $h(x)=\log_2(x^2-x)-\log_2(1-x)$.

479. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log_2\frac{1}{x^2}\cdot\log_{x^2}(x+2)$ i podaj jej zbiór wartości.

480. Funkcja g określona jest wzorem $g(x)=\log_2\frac{x^2-9}{|x|-3}$.

a) Wyznacz dziedzinę funkcji g.

b) W Przekształcając wykres funkcji $f(x)=\log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji g.

c) Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $g(x)=m$.

481. W Określ zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{\log_5 7}{\log_x 7}$.

482. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\dfrac{|\log_7 x|}{\log_7\sqrt{x}}$.

483. W Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\left|\log_2 8\sqrt[3]{x}+\log_2 4\sqrt[3]{x}+\log_2 2\sqrt[3]{x}\right|$. Podaj te wartości parametru m, dla których równanie $f(x)=m$ ma dwa rozwiązania mniejsze od 1.

484. R Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\log_2 x\cdot\log_8 x-\log_4 x$.

485. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+10)$.

486. Wykaż, że funkcja $f(x)=\log\dfrac{x-1}{x+1}$ dla przeciwnych argumentów przyjmuje przeciwne wartości.

487. Funkcja f, określona w zbiorze liczb rzeczywistych, dana jest wzorem $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$. Wykaż, że jeśli $a+b=0$, to $(f(a))^2=(f(b))^2$.

ZADANIA Z PARAMETREM

488. Znajdź takie wartości parametru m, aby reszta z dzielenia trójmianu $x^2+\log(m-2)\cdot x+\log(m-2)$ przez dwumian $x-2$ jest była równa 10.

489. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2-2x-\log_{\frac{1}{3}} m=0$ ma dwa różne dodatnie pierwiastki?

490. R Liczby x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania $mx^2-mx+2=0$. Dla jakich wartości parametru m spełniona jest nierówność $\log_2 x_1+\log_2 x_2>-3$?

491. Dane jest równanie $x^2+2x+1+\log m=0$. Funkcja $f(m)=x_1x_2$ określona jest w zbiorze tych m, dla których dane równanie ma różne pierwiastki x_1 i x_2 Wyznacz dziedzinę funkcji f i określ jej zbiór wartości.

492. W Wyznacz te wartości parametru p, dla których równanie $|\log_3(x+2)|=2p-1$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

* * * * *

493. Wyznacz te wartości parametru m, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\log\left[(m-2)x^2+(m-2)x+1\right]$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

494. Wyznacz te wartości parametru k, dla których dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{\log(x^2+4x+k)}$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

495.* R Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których dziedzina funkcji $f(x)=\log_2[(m+2)x^2+(m+5)x-1]$ nie jest zbiorem pustym i zawiera się w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

ZADANIA RÓŻNE

496. W Uzasadnimy, że $\frac{4}{3}<\log_3 5<\frac{5}{3}$.

- $3\log_3 5=\log_3 5^3>\log_3 81=4$. Zatem $\log_3 5>\frac{4}{3}$.
- $3\log_3 5=\log_3 5^3<\log_3 243=5$. Zatem $\log_3 5<\frac{5}{3}$.

Wykorzystując powyższe uzasadnienie

a) wykaż, że $\log_2 3\in\left(1\frac{1}{2};\ 1\frac{3}{4}\right)$;

b) rozstrzygnij, która liczba jest większa, $\log_2 3$ czy $\log_3 5$.

497. R Wykaż, że $\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}<4$.

498. R Uzasadnij, że

a) $\log_7 6\cdot\log_7 36\cdot\log_7 216<6$;

b) $\log_3 2\cdot\log_3 10\cdot\log_3 100>4$.

499. W Wykaż, że jeżeli $a, b\in(0, 1)$, to $\log_a b+\log_b a\geq 2$.

500. R Podaj najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x\log_5 0{,}5<\log_5 15$.

501. Rozwiąż równanie $x(x-3)+\log_x x^2=0$.

502. R Uzasadnij, że równanie $x^2+\log_4 3=\log_4 9^x$ nie ma rozwiązań.

503. R Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^4-2x^3-x^2+8x-16<0$. Sprawdź, czy liczby $a=\log_{12}3\cdot\log_3 36+\log_{12}4$, $b=\log_3 7\cdot\log_{49}\frac{1}{9}$ należą do zbioru A.

504. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $x^4-2x^3+8x-16<0$. Sprawdź, czy liczby $a=(\log_2 6)^2-\log_2 6\cdot\log_2 3$, $b=\log 5^2-\log^2 5$ należą do zbioru A.

* * * * *

505. Zaznacz na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiór $A=\{(x, y):\ \log_x y=2\}$.

506. Zaznacz na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie $\log_{xy} x^2 = 1$.

507. W Zaznacz na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają równość $\log_x y = \log_y x$.

508.* R Zaznacz na płaszczyźnie z układem współrzędnych zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają równanie $\log_2 x \cdot \log_2 y = \log_2 \frac{x^2 y^2}{16}$.